Grupa A, 03.10.2013., ispit pisati hemijskom olovkom

1. Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x - y - z &= 4 \\ x + y - z &= 5 \\ x + y + z &= 6 \ . \end{aligned}$$

2. Za koje vrijednosti parametra m vektori $\vec{a} = (2m, 1+m, 1)^\top$, $\vec{b} = (-m, 1, m)^\top$, $\vec{c} = (m, 1, m-2)^\top$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

3. Odrediti prvi izvod funkcije $y = \ln \dfrac{x^2-1}{x+1} + \operatorname{arc\,tg} x^2$.

4. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{7x-17}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

5. Primjenom određenog integrala odrediti površinu figure koju ograničava x-osa zajedno sa linijama $x + 3y - 3 = 0$, $x = -3$ i $x = 6$.

6. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' + y - e^x = 0$.

Grupa B, 03.10.2013., ispit pisati hemijskom olovkom

1. Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x - y - z &= 3 \\ x + y - z &= 4 \\ x + y + z &= 5 \ . \end{aligned}$$

2. Za koje vrijednosti parametra m vektori $\vec{a} = (m, -m, 1)^\top$, $\vec{b} = (-m, m, 2m+2)^\top$, $\vec{c} = (m, m+1, 1-m)^\top$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

3. Odrediti prvi izvod funkcije $y = \ln \dfrac{x}{x-1} + \arcsin x^2$.

4. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{9x-2}{x^2-x-6}\mathrm{d}x$.

5. Primjenom određenog integrala odrediti površinu figure koju ograničava x-osa zajedno sa linijama $-x - 2y + 2 = 0$, $x = -4$ i $x = 2$.

6. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' - y\,tg\,x = \dfrac{1}{cos\,x}$.

Grupa C, 03.10.2013., ispit pisati hemijskom olovkom

1. Rješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x + y - z &= 3 \\ x + y + z &= 4 \ . \end{aligned}$$

2. Za koje vrijednosti parametra m vektori $\vec{a} = (2m, 1-m, 1)^\top$, $\vec{b} = (-2m, m, 2m+2)^\top$, $\vec{c} = (m, 1+m, 1-m)^\top$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

3. Odrediti prvi izvod funkcije $y = \ln \dfrac{x^2}{x+1} + \operatorname{tg} x^2$.

4. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{11x+14}{x^2+3x-4} \mathrm{d}x$.

5. Primjenom određenog integrala odrediti površinu figure koju ograničava y-osa zajedno sa linijama $x + y - 1 = 0$, $y = 3$ i $y = -2$.

6. Rješiti diferencijalnu jednačinu $xy' - 3y = x^4 e^x$.

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
x - y + z &= 3\\
x - y - z &= 4\\
x + y - z &= 5\\
x + y + z &= 6
\end{aligned}
$$

Rj.-upute:

Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(\bar{A})$$

Dati sistem nema rješenje.

Rješiti sistem linearnih jednačina

$$x - y + z = 2$$
$$x - y - z = 3$$
$$x + y - z = 4$$
$$x + y + z = 5$$

Rj.-upute:

Rješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad rang(A) < rang(\bar{A})$$

Dati sistem nema rješenje.

④ Rješiti sistem linearnih jednačina

$$x - y + z = 1$$
$$x - y - z = 2$$
$$x + y - z = 3$$
$$x + y + z = 4$$

Rj. - upute:

Rješimo sistem Kronecker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}(\bar{A})$$

Dati sistem nema rješenja

(#) Za koje vrijednosti parametra m vektori $\vec{a}=(2m, 1+m, 1)^T$, $\vec{b}=(-m, 1, m)^T$, $\vec{c}=(m, 1, m-2)^T$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

Rj: Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ će činiti bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora akko su linearno nezavisni tj. akko jedino rješenje sistema po nepoznatim α β i γ

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$$

je trivijalno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$. Drugim riječima akko je determinanta $\begin{vmatrix} 2m & -m & m \\ 1+m & 1 & 1 \\ 1 & m & m-2 \end{vmatrix}$ različita od nule.

Pa izračunajmo vrijednost ove determinante.

$$\begin{vmatrix} 2m & -m & m \\ 1+m & 1 & 1 \\ 1 & m & m-2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1+m & 1 & 1 \\ 1 & m & m-2 \end{vmatrix} \overset{I_k+II_k\cdot 2}{\underset{III_k+II_k}{=}} m\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3+m & 1 & 2 \\ 2m+1 & m & 2m-2 \end{vmatrix} =$$

$$= m\begin{vmatrix} 3+m & 2 \\ 2m+1 & 2m-2 \end{vmatrix} \overset{II_v+I_v}{=} m\begin{vmatrix} 3+m & 2 \\ 3m+4 & 2m \end{vmatrix} = m\left(6m+2m^2-6m-8\right)$$

$$= m\left(2m^2-8\right) = 2m(m-2)(m+2)$$

Za $m\neq 0$, $m\neq 2$, $m\neq -2$ vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

(#) Za koju vrijednost parametra m vektori $\vec{a}=(m,-m,1)^T$, $\vec{b}=(-m,m,2m+2)^T$, $\vec{c}=(m,m+1,1-m)^T$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

Rj: Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora akko su linearno nezavisni, tj. akko jedino rješenje sustava

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

po nepoznatim α, β i γ je trivijalno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$. Drugim riječima akko je sljedeća determinanta različita od nule

$$\begin{vmatrix} m & -m & m \\ -m & m & m+1 \\ 1 & 2m+2 & 1-m \end{vmatrix}.$$

Izračunajmo ovu determinantu:

$$\begin{vmatrix} m & -m & m \\ -m & m & m+1 \\ 1 & 2m+2 & 1-m \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -m & m & m+1 \\ 1 & 2m+2 & 1-m \end{vmatrix} \xlongequal[III_k+II_k]{I_k+II_k} m\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & m & 2m+1 \\ 2m+3 & 2m+2 & m+3 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} 0 & 2m+1 \\ 2m+3 & m+3 \end{vmatrix} = -m(2m+1)(2m+3)$$

Za $m\neq 0$, $m\neq -\frac{1}{2}$, $m\neq -\frac{3}{2}$ vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

Za koje vrijednosti parametra m vektori $\vec{a}=(2m, 1-m, 1)^T$, $\vec{b}=(-2m, m, 2m+2)^T$, $\vec{c}=(m, 1+m, 1-m)$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

Rj.

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ će činiti bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora akko su linearno nezavisni, tj. akko jedino rješenje sistema

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$$

(po nepoznatim α, β i γ) je trivijalno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$. Drugim riječima akko je determinanta

$$\begin{vmatrix} 2m & -2m & 1 \\ 1-m & m & 2m+2 \\ 1 & 1+m & 1-m \end{vmatrix}$$

različita od nule.

Pa izračunajmo vrijednost date determinante.

$$\begin{vmatrix} 2m & -2m & m \\ 1-m & m & 1+m \\ 1 & 2m+2 & 1-m \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1-m & m & 1+m \\ 1 & 2m+2 & 1-m \end{vmatrix} \underset{II_k+III_k\cdot 2}{\overset{I_k+II_k\cdot(-2)}{=}} m\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1-3m & 2+3m & 1+m \\ -1+2m & 4 & 1-m \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} -1-3m & 2+3m \\ -1+2m & 4 \end{vmatrix} \overset{II_k+I_k}{=} m\begin{vmatrix} -1-3m & 1 \\ -1+2m & 3+2m \end{vmatrix} =$$

$$= m(-3-2m-9m-6m^2+1-2m) = m(-1)(6m^2+13m+2) =$$

$$= -m(m+2)(6m+1)$$

Za $m\neq 0$, $m\neq -2$, $m\neq -\frac{1}{6}$ vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

(#) Odrediti prvi izvod f-je

(a) $y = \ln \frac{x^2-1}{x+1} + \operatorname{arc} tg\, x^2$

(b) $y = \ln \frac{x}{x-1} + \arcsin x^2$

c) $y = \ln \frac{x^2}{x+1} + tg\, x^2$

Rj. - upute

(a) $\left(\ln \frac{x^2-1}{x+1}\right)' = \ldots = \frac{1}{x-1}$; $\left(\operatorname{arc} tg\, x^2\right)' = \frac{2x}{x^4+1}$

$$y' = \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^4+1}$$

b) $\left(\ln \frac{x}{x-1}\right)' = \ldots = \frac{-1}{x^2-x}$; $\left(\arcsin x^2\right)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

$$y' = \frac{-1}{x^2-x} + \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(c) $\left(\ln \frac{x^2}{x+1}\right)' = \ldots = \frac{x+2}{x^2+1}$; $tg\, x^2 = \frac{2x}{\cos^2 x}$

$$y' = \frac{x+2}{x^2+1} + \frac{2x}{\cos^2 x}$$

(#) Odrediti integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{7x-17}{x^2-5x+6}\,dx$. (b) $\displaystyle\int \frac{9x-2}{x^2-x-6}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{11x+14}{x^2+3x-4}\,dx$

Rj.-upute

(a) $$\frac{7x-17}{x^2-5x+6} = \dots = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}$$

$$\int \frac{7x-17}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{x-3}\,dx = 3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C$$

(b) $$\frac{9x-2}{x^2-x-6} = \dots = \frac{4}{x+2} + \frac{5}{x-3}$$

$$\int \frac{9x-2}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{4}{x+2}\,dx + \int \frac{5}{x-3}\,dx = 4\ln|x+2| + 5\ln|x-3| + C$$

c) $$\frac{11x+14}{x^2+3x-4} = \dots = \frac{5}{x-1} + \frac{6}{x+4}$$

$$\int \frac{11x+14}{x^2+3x-4}\,dx = 5\int \frac{dx}{x-1} + 6\int \frac{dx}{x+4} = 5\ln|x-1| + 6\ln|x+4| + C$$

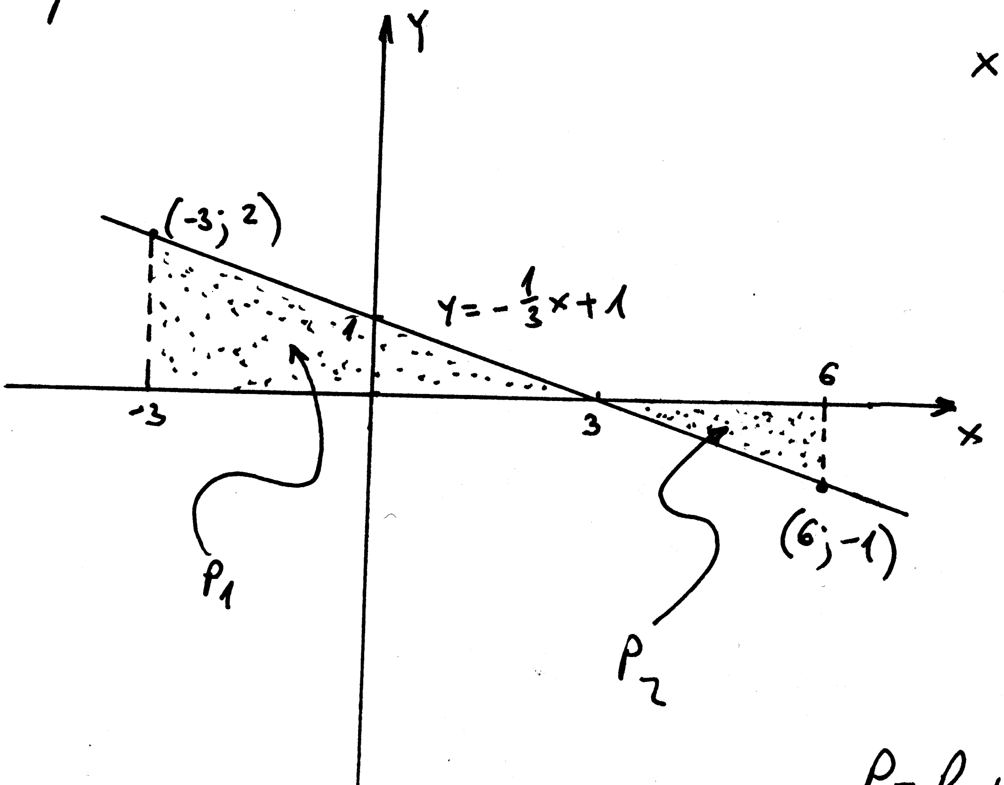
(#) Primenom određenog integrala odrediti površinu figure koju ograničava x-osa zajedno sa linijama $x+3y-3=0$, $x=-3$ i $x=6$.

Rj.-upute

$$x+3y-3=0$$

$$-3y = x-3 \quad /:(-3)$$

$$y = -\frac{1}{3}x+1$$



$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \int_{-3}^{3} \left(-\frac{1}{3}x+1\right) dx = \ldots = 6$$

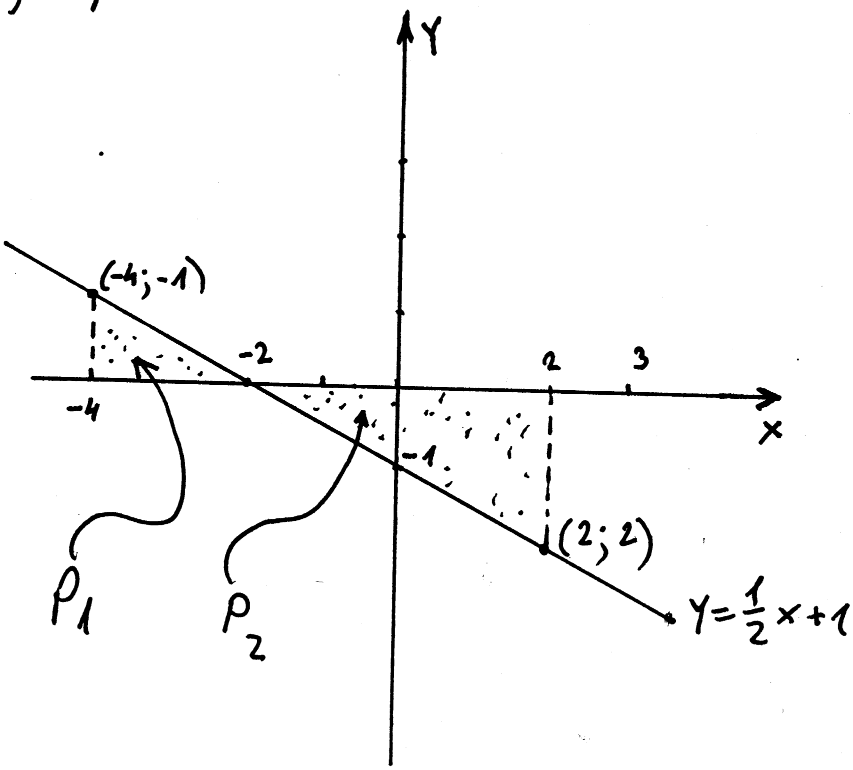
$$P_2 = \left| \int_{3}^{6} \left(-\frac{1}{3}x+1\right) dx \right| = \ldots = +\frac{3}{2}$$

$$P = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

Primenom određenog integrala

Odrediti površinu figure koju ograničava x-osa zajedno sa linijama $-x-2y+2=0$, $x=-4$ i $x=2$.

Rj.-upute:



$$-x-2y+2=0$$

$$2y=-x+2$$

$$y=-\frac{1}{2}x+1$$

$$P=P_1+P_2$$

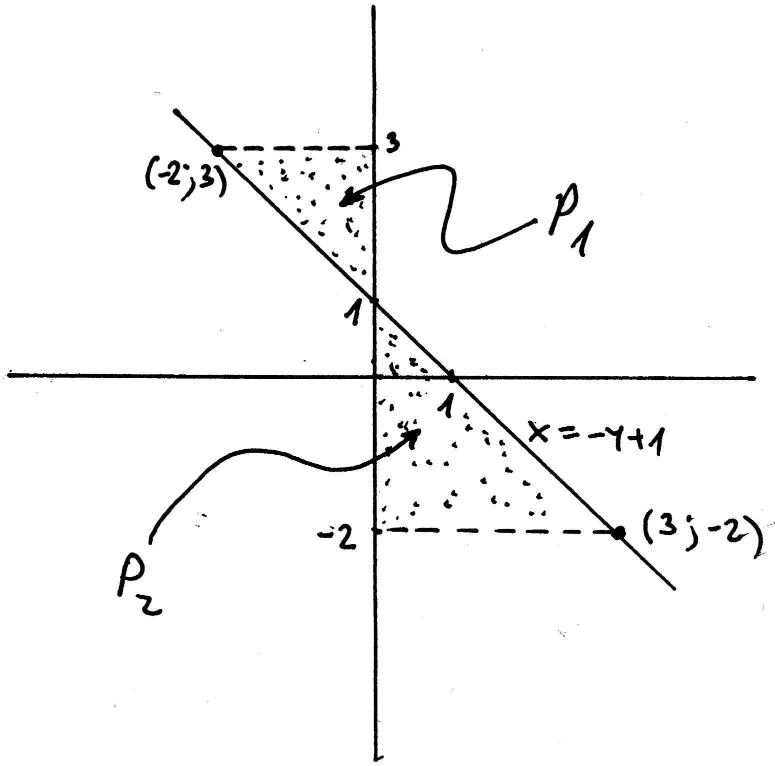
$$P_1=\int_{-4}^{-2}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx=\ldots=1$$

$$P_2=\left|\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx\right|=\ldots=4$$

$$P=P_1+P_2=5$$

(#) Primjenom određenog integrala odrediti površinu figure koju ograničava y-osa zajedno sa linijama $x+y-1=0$, $y=3$ i $y=-2$.

Rj.-upute



$$x+y-1=0$$

$$x=-y+1$$

$$P=P_1+P_2$$

$$P_1=\left|\int_1^3(-y+1)\,dy\right|=\ldots=2$$

$$P_2=\int_{-2}^{1}(-y+1)\,dy=\ldots=\frac{9}{2}$$

$$P=2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$$

(#) Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $xy' + y - e^x = 0$ koje zadovoljava uslov $y(a) = b$.

Rj:

$$xy' + y = e^x \quad /:x$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^x$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = q(x)$, $\left(p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = \frac{1}{x}e^x\right)$, uvodimo smjene $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1}{x}e^x$$

$$u'v + \underbrace{u\left(v' + \frac{v}{x}\right)} = \frac{e^x}{x}$$

a) $v' + \frac{v}{x} = 0$

$$v' = \frac{dv}{dx} \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

b) $u'v + \underbrace{u\left(v' + \frac{v}{x}\right)} = \frac{e^x}{x}$

za $v = \frac{1}{x}$ ovaj dio je jednak nuli

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} \quad /\cdot x$$

$$u' = \frac{du}{dx} \qquad \frac{du}{dx} = e^x$$

$$du = e^x dx$$

$$u = e^x + c$$

$$y = \frac{e^x + c}{x}$$

opšte rješenje diferencijalne jednačine

$y(a) = b$

$x = a,\ y = b$

$$b = \frac{e^a + c}{a} \Rightarrow e^a + c = ab$$

$$c = ab - e^a$$

$$y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$$

je traženo rješenje (partikularno rješenje diferencijalne jednačine)

Odrediti rješenje diferencijalne jednačine

$y' - y\,tg x = \dfrac{1}{\cos x}$ koje zadovoljava uslov $y(0)=0$.

Rj.

$y' - y\,tg x = \dfrac{1}{\cos x}$ je linearna diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = g(x)$, uvodimo smjenu $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti.

$$u'v + uv' - uv\,tg x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v + u\underbrace{(v' - v\,tg x)}_{} = \frac{1}{\cos x}$$

a)

$$v' - v\,tg x = 0$$

$$v' = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = v\,tg x$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{-d(\cos x)}{\cos x} \quad /\int$$

$$\ln|v| = -\ln|\cos x|$$

$$v = (\cos x)^{-1}$$

$$v = \frac{1}{\cos x}$$

b)

$$u'v + u\underbrace{(v' - v\,tg x)}_{} = \frac{1}{\cos x}$$

ovaj dio je jednak nuli za $v = \dfrac{1}{\cos x}$

$$u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad /\cdot \cos x$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$u = x + C$$

$y = \dfrac{x+C}{\cos x}$ je opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$y(0) = 0$$

$$x = 0,\ y = 0$$

$$0 = \frac{0 + C}{\underbrace{\cos 0}_{=1}} \Rightarrow C = 0$$

$y = \dfrac{x}{\cos x}$ je traženo rješenje (partikularno rješenje diferencijalne jednačine)

Odrediti rješenje diferencijalne jednačine $xy' - 3y = x^4 e^x$ tako da je $y(1) = e$.

Rj.

$$xy' - 3y = x^4 e^x \quad /:x$$

$$y' - 3\frac{1}{x}y = x^3 e^x$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = q(x)$

uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + uv'$

gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti

$$u'v + uv' - \frac{3}{x}uv = x^3 e^x$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{3}{x}v\right)} = x^3 e^x$$

a) $v' - \frac{3}{x}v = 0$

$$v' = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = 3\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = 3\ln|x|$$

$$v = x^3$$

b) $u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{3}{x}v\right)}_{} = x^3 e^x$

za $v = x^3$ ovaj dio je jednako 0

$$u'x^3 = x^3 e^x$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$du = e^x dx \qquad u = e^x + c$$

$y = x^3(e^x + c)$ je opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$y(1) = e \implies 1^3(e^1 + c) = e$$

$$e + c = e$$

$$c = 0$$

$y = x^3 e^x$ je traženo rješenje (partikularno rješenje diferencijalne jednačine)